РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ 2015 г.
I КУРС

Задача 1 (4 балла)

Определите соответствие между переменными x и y, если известно, что $X^{2015} = X$, где $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$, $x, y \in R; x, y \neq 0$.

<u>Решение</u>

Найдём закономерность X^n:

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}; \qquad X^2 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & yx \end{pmatrix};$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & yx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x^2 y \\ y^2 x & 0 \end{pmatrix}; \qquad X^4 = \begin{pmatrix} 0 & x^2 y \\ y^2 x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 y^2 & 0 \\ 0 & y^2 x^2 \end{pmatrix};$$

… и т.д.

$$X^{2015} = \begin{pmatrix} 0 & x^{1008} y^{1007} \\ y^{1008} x^{1007} & 0 \end{pmatrix}.$$

По условию задачи составим равенство:

$$\begin{pmatrix} 0 & x^{1008} y^{1007} \\ y^{1008} x^{1007} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^{1008} y^{1007} = x, \\ y^{1008} x^{1007} = y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1, \\ yx = 1. \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x}$$

Ответ: искомая зависимость $y = \dfrac{1}{x}$.

Задача 2 (6 баллов)

Треугольник ABC и точка O таковы, что $3 \cdot \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади треугольника AOB?

<u>Решение</u>

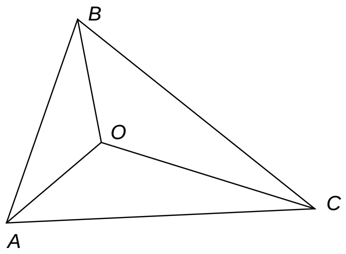

Рис. 1

Площадь ΔOAB: $S_{OAB} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right|$. Площадь ΔABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \times (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA}) - (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA})\right|$$

С учетом $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$, получаем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \times (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(\overrightarrow{OB} \times (-3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB})) - (\overrightarrow{OA} \times (-3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA})\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-3\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|3\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \frac{1}{2}\left|6\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = 6S_{OAB}$$

Ответ: в 6 раз.

Задача 3 (5 баллов)

Парабола $y^2 = 2px$ пересекает окружность $x^2 + y^2 + 2x - 36 = 0$ в точках A и B. Найти параметр p, если треугольник OAB правильный (точка O – начало координат).

Решение

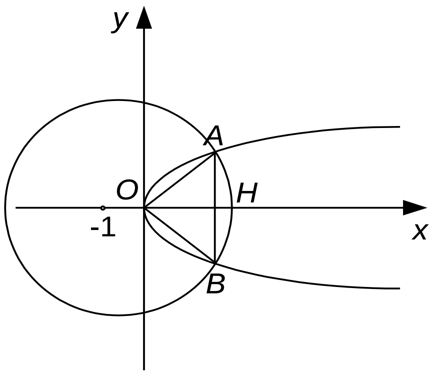

Рис. 2

Имеем окружность $(x + 1)^2 + y^2 = 37$ с центром в т.(-1;0) и $R = \sqrt{37}$.

Парабола в зависимости от знака p может быть направлена влево или вправо.

Рассмотрим случай $p>0$ (ветви параболы направлены вправо).

Пусть H имеет координаты $(x_0, 0)$.

Тогда $A(x_0, \sqrt{2px_0})$. В ΔABO, $AB = 2\sqrt{2px_0}$, а высота $OH = x_0$.

Между ними выполняется соотношение

OH = $\frac{\sqrt{3}}{2}AB$, т.е. $x_0 = \sqrt{6px_0} \to x_0^2 = 6px_0 \to x_0 = 6p$.

Тогда точка A имеет координаты $A(6p, p\sqrt{12})$ и удовлетворяет уравнению окружности: $36p^2 + 12p^2 + 12p - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4p^2 + p - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{8} = \left[\begin{array}{l} -1, \\ 3/4. \end{array}\right.$

Параметр $p = -1$ соответствует направлению ветвей параболы влево.

Ответ: $p_1 = 3/4; \quad p_2 = -1.$

Задача 4 (*6 баллов*)

При каких значениях a и b выполняется равенство $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 + ax + b} = 1$?

Решение

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 + ax + b} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\cdot(x+3)}{x^3 + ax + b} = 1$$

Чтобы предел существовал, необходимо разложить знаменатель на множители:

$$x^3 + ax + b \equiv (x-2)\cdot\left(x^2 + cx + d\right) \quad \Rightarrow \quad x^3 + ax + b \equiv x^3 - 2x^2 + cx^2 - 2cx + dx - 2d \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^3 + ax + b \equiv x^3 + (c-2)\cdot x^2 + (d - 2c)\cdot x - 2d$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях: $\begin{cases} 0 = c - 2, \\ a = d - 2c, \\ b = -2d. \end{cases}$

Так как $c = 2$, то $x^3 + ax + b = (x-2)\cdot\left(x^2 + 2x + d\right) = x^3 + (d-4)\cdot x - 2d$

Полученное выражение подставим в предел

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\cdot(x+3)}{(x-2)\cdot\left(x^2 + 2x + d\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)}{x^2 + 2x + d} = \frac{5}{8+d} = 1 \quad \Rightarrow \quad d = -3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -7, \\ b = 6. \end{cases}$$

Ответ: $a = -7, b = 6.$

Замечание. Задачу можно решить другим способом. Предположим, что $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 + ax + b} = \left[\frac{0}{0}\right]$, тогда можно применить правило Лопиталя. Предлагаем читателям довести решение этим способом до конца самостоятельно.

Задача 5 (4 балла)

Найти $f^{(2015)}(\pi)$, если $f(x) = x \cdot \cos x$.

Решение

$f(\pi) = \pi \cdot \cos\pi = -\pi$.

Найдём закономерность для производной *n*-го порядка заданной функции:

$f^{/}(x) = (x \cdot \cos x)^{/} = \cos x - x \cdot \sin x \quad \Rightarrow f^{/}(\pi) = \cos\pi - \pi \cdot \sin\pi = -1.$

$f^{//}(x) = -\sin x - \sin x - x\cos x = -2\sin x - x\cos x \quad \Rightarrow \quad f^{//}(x) = -2\sin\pi - \pi\cos\pi = +\pi.$

$f^{///}(x) = -3\cos x + x\sin x \quad \Rightarrow \quad f^{///}(\pi) = 3.$

$f^{/V}(x) = 4\sin x + x\cos x \quad \Rightarrow \quad f^{/V}(\pi) = -\pi.$

И так далее.

Следовательно, производная 2015-го порядка равна: $f^{(2015)}(\pi) = 2015.$

Ответ: $f^{(2015)}(\pi) = 2015.$

Задача 6 (8 баллов)

Найти точку минимума функции $f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (2x+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + 4x^2}$.

Решение

Область определения функции $x \in (-\infty; +\infty)$.

Преобразуем функцию, выделив полные квадраты в подкоренных выражениях:

$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (2x+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + 4x^2} \Rightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{49}{25}} + \sqrt{\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{16}{25}} \right)$$

Найдём критические точки:

$$f^{/}(x) = \sqrt{5} \cdot \left(\frac{x - \frac{1}{5}}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{49}{25}}} + \frac{x + \frac{2}{5}}{\sqrt{\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{16}{25}}} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{1}{5}\right) \cdot \sqrt{\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{16}{25}} + \left(x + \frac{2}{5}\right) \cdot \sqrt{\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{49}{25}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{2}{5}\right)\sqrt{\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{49}{25}} = \left(\frac{1}{5} - x\right)\sqrt{\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{16}{25}} \quad \left(ОДЗ: x \in \left[-\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right] \right)$$

$$\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{49}{25} \right) = \left(\frac{1}{5} - x\right)^2 \cdot \left(\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{16}{25} \right)$$

$$\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(x + \frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{49}{25} = \left(\frac{1}{5} - x\right)^2 \cdot \left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - x\right)^2 \cdot \frac{16}{25}$$

$$\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 \cdot 49 = \left(\frac{1}{5} - x\right)^2 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad \left| x + \frac{2}{5} \right| \cdot 7 = \left| \frac{1}{5} - x \right| \cdot 4 \quad \Rightarrow$$

С учётом ОДЗ получаем: $7x + \frac{14}{5} = \frac{4}{5} - 4x \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2}{11}.$

Доказательство факта, что найденная точка является точкой минимума, предоставляем читателям.

Ответ: $x = -\dfrac{2}{11}$ - точка минимума.

Задача 7 (10 баллов)

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x, y) = 4\sin 3x \cdot \cos y + 5\sin 3x \cdot \sin y + \sqrt{23} \cdot \cos 3x.$$

Решение

Преобразуем : $f(x, y) = 4\sin 3x \cdot \cos y + 5\sin 3x \cdot \sin y + \sqrt{23} \cdot \cos 3x =$

$$\sin 3x \cdot (4\cos y + 5\sin y) + \sqrt{23} \cdot \cos 3x.$$

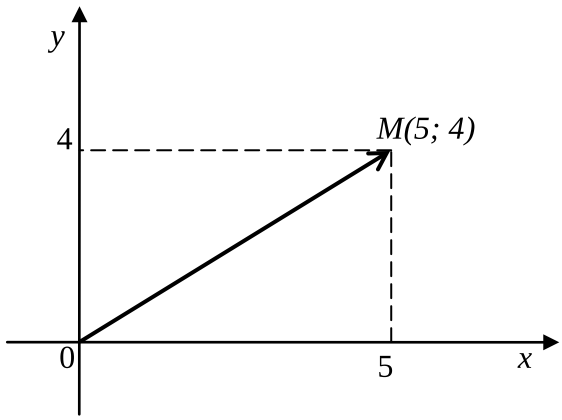

Рис. 3.

Рассмотрим выражение $4\cos y + 5\sin y$.

Существует такой угол φ_1, что

$$4\cos y + 5\sin y = \sqrt{5^2 + 4^2} \cdot \sin(y + \varphi_1) =$$
$$\sqrt{41} \cdot \sin(y + \varphi_1).$$

(Угол φ_1 - вспомогательный угол (см. рис.) $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{41}$)

Функция принимает вид

$$f(x, y) = \sqrt{41} \cdot \sin(y + \varphi_1) \cdot \sin 3x + \sqrt{23} \cdot \cos 3x.$$

Очевидно, что $\max(\sin(y + \varphi_1)) = 1$, поэтому

При каждом конкретном x

$$f(x, y) \le \sqrt{41} \cdot \sin 3x + \sqrt{23} \cdot \cos 3x.$$

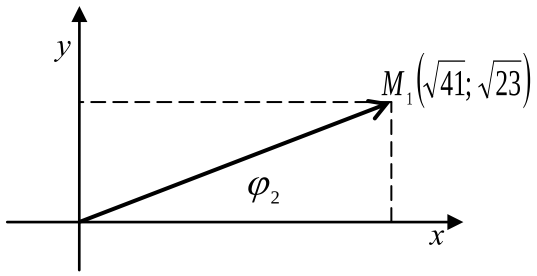

Рис. 4.

Рассмотрим выражение

$$\sqrt{41} \cdot \sin(y + \varphi_1) \cdot \sin 3x + \sqrt{23} \cdot \cos 3x.$$

Существует такой угол φ_2 такой, что

$$\sqrt{41} \cdot \sin 3x + \sqrt{23} \cdot \cos 3x =$$
$$= \sqrt{\left(\sqrt{41}\right)^2 + \left(\sqrt{23}\right)^2} \cdot \sin(3x + \varphi_2) =$$
$$= 8 \cdot \sin(3x + \varphi_2)$$

(Угол φ_2 - вспомогательный угол (см. рис.) $\left|\overrightarrow{OM_1}\right| = 8$).

$$\max(8\sin(3x + \varphi_2)) = 8.$$

Ответ: наибольшее значение данной функции равно 8.

Задача 8 (5 баллов)

Какое из двух чисел больше: $2014^{2016} \cdot 2016^{2014}$ или $2015^{2\cdot 2015}$?

Решение

Преобразуем: 1) $2014^{2016} \cdot 2016^{2014} = (2014 \cdot 2016)^{2014} \cdot 2014^2$;

2) $2015^{2\cdot 2015} = (2015 \cdot 2015)^{2015} = \left(2015^2\right)^{2014} \cdot 2015^2$.

Так как $(n-1)\cdot(n+1)<n^2$, то $2014\cdot 2016<2015^2$, также учтём, что $2014^2<2015^2$, поэтому $2014^{2016}\cdot 2016^{2014}<2015^{2\cdot 2015}$.

Ответ: Большее число $2015^{2\cdot 2015}$.

Задача 9 (7 баллов)

Верно ли, что неравенство $2\cdot\sqrt{a}+3\cdot\sqrt[3]{b}\ge 5\cdot\sqrt[5]{ab}$ выполняется при всех $a>0, b>0$?

Решение

Разделим предварительно обе части неравенства на 5:

$$2\cdot\sqrt{a}+3\cdot\sqrt[3]{b}\ge 5\cdot\sqrt[5]{ab} \quad\Rightarrow\quad \frac{2\cdot\sqrt{a}+3\cdot\sqrt[3]{b}}{5}\ge\sqrt[5]{ab}$$

Рассмотрим левую и правую часть неравенства:

1) $\dfrac{2\cdot\sqrt{a}+3\cdot\sqrt[3]{b}}{5}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{5}$ - среднее арифметическое двух чисел $a^{\frac{1}{2}}$ трёх чисел $b^{\frac{1}{3}}$.

2) $\sqrt[5]{ab}=a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{5}}+=\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}$ среднее геометрическое тех же чисел.

Известно, что среднее арифметическое n чисел больше или равно среднего геометрического тех же чисел (равенство возможно только при условии, что все числа равны 1). Следовательно, неравенство верное.

Ответ: доказано, что $2\cdot\sqrt{a}+3\cdot\sqrt[3]{b}\ge 5\cdot\sqrt[5]{ab}$ при $a>0, b>0$?

Задача 10 (балл)

На окружности отмечено 8 различных точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся семизвенных ломаных с вершинами в этих точках?

Решение

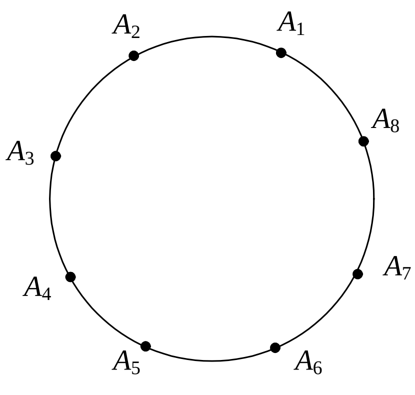

Рис. 5.

Выбираем произвольную начальную точку – A_1. Тогда семизвенная ломаная содержит 8 вершин, т.е. все точки на окружности. Следовательно, чтобы не было самопересечений из A_1, строим звено либо в A_2, либо в A_8. Из A_2 строим либо в A_3, либо в A_8, а из A_8 – либо в A_2, либо в A_1 и т.д. Т.е. из каждой из 6 вершин есть 2 варианта, у седьмой – один вариант. Получается 2^6 вариантов. Тогда рассмотрим каждую вершину как начальную – получаем $8*2^6 = 512$ вариантов. С учетом неразличимости начала и конца ломаной, каждая линия учтена дважды, поэтому делим получившийся результат пополам: $512/2 = 256$.

Ответ: 256 вариантов.